МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань, самостійної роботи з розділу
КІНЕМАТИКА
курсу теоретичної механіки
(для студентів 1 і 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 «Охорона праці»)

ХАРКІВ
ХНАМГ
2012

Методичні вказівки для практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань, самостійної роботи з розділу КІНЕМАТИКА курсу теоретичної механіки (для студентів 1 і 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 «Охорона праці») / Харк. нац. акад. міськ. госп.; уклад.: В.П. Шпачук, М.С. Золотов, О.І. Рубаненко, А.О. Гарбуз. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 41 с.

Укладачі: *В.П. Шпачук, М.С. Золотов, О.І. Рубаненко, А.О. Гарбуз*

Рецензент: *В.О. Скляров*

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 4 від 29.11.2011 р.

Методичні вказівки для самостійної роботи студентів переслідують мету підвищити її ефективність як у позааудиторний час, так і при спілкуванні з викладачем.

Методичні вказівки містять по тридцять варіантів задач за трьома темами розділу «Кінематика»: «Кінематика точки», «Обертальний рух твердого тіла», «Кінематичний аналіз плоского механізму». Для кожної теми розглянуто приклади розв'язання задач. При самостійному освоюванні теми студентам рекомендується закріпити знання теоретичного матеріалу, розібрати відповідний приклад і розв'язати кілька задач із запропонованих тридцяти варіантів.

Матеріали цих вказівок можуть використовуватись також викладачами кафедри при проведенні самостійних і контрольних робіт в аудиторії, при прийманні розрахунково-графічних завдань і комплектуванні задач в екзаменаційних білетах.

Даний навчально-методичний посібник складено з метою допомоги студентам будівельних, електромеханічних, екологічних і транспортних спеціальностей вузу в самостійній роботі, при підготовці до занять, контрольних робіт, тестового контролю, захисту змістових модулів, заліків та іспитів з теоретичної механіки.

1. Кінематика точки

Рух точки можна задати одним з трьох способів: векторним, координатним та натуральним. При практичних розрахунках використовують в основному координатний та натуральний способи. Розглянемо, як задається рух і визначаються швидкість та прискорення точки при вказаних способах.

1.1. Векторний спосіб

При векторному способі завдання руху точки задається закон руху

$$\bar{r} = \bar{r}(t)\,, \tag{1.1}$$

де $\bar{r}$ – радіус-вектор точки (вектор, проведений із нерухомої точки O до розглядуваної) (рис. 1.1).

Швидкість точки – векторна величина, яка:

1) дорівнює першій похідній радіуса-вектора точки за часом

$$\bar{V} = \frac{d\,\bar{r}}{dt} \text{ або } \bar{V} = \dot{\bar{r}}\,; \tag{1.2}$$

2) напрямлена по дотичній до траєкторії точки у бік її руху (рис. 1.1);

3) характеризує бистроту зміни положення точки за часом.

Прискорення точки – векторна величина, яка:

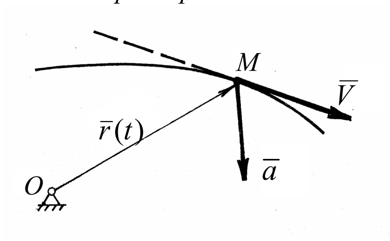


Рис. 1.1

1) дорівнює першій (другій) похідній швидкості (радіуса-вектора) точки за часом

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} \text{ або}$$

$$\overline{a} = \dot{\overline{V}} = \ddot{\overline{r}}; \qquad (1.3)$$

2) напрямлена у бік угнутості траєкторії точки (рис. 1.1);

3) характеризує бистроту зміни швидкості точки за часом.

1.2. Координатний спосіб

При координатному способі рух точки задається її декартовими координатами як функціями часу (рис. 1.2):

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \qquad (1.4)$$

Рівняння (1.4) являє собою одночасно рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де роль параметру відіграє час t. Виключивши з рівнянь руху (1.4) час t, можна знайти рівняння траєкторії у звичайній формі, тобто у вигляді, що дає залежність між її координатами.

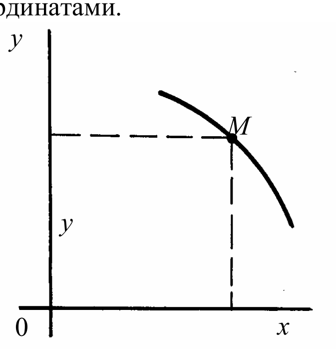


Рис. 1.1

Швидкість точки визначається за формулами

$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \qquad (1.5)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}. \qquad (1.6)$$

де V_x, V_y – проекції вектора швидкості на осі x та y відповідно; $\dot{x}, \dot{y}$ – перші похідні за часом від відповідних координат точки; V – модуль швидкості точки; $\overline{V}_x, \overline{V}_y$ – складові вектора швидкості уздовж осей x та y.

Вектор швидкості $\overline{V}$ завжди напрямлений по дотичній до траєкторії в даній точці в бік її руху (рис. 1.3).

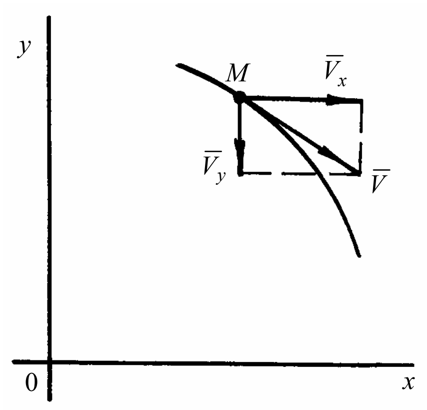


Рис. 1.3

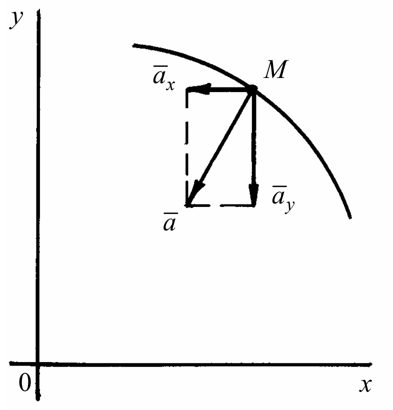


Рис. 1.4

Прискорення точки визначається за формулами

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}\,; \qquad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}\,; \tag{1.7}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \tag{1.8}$$

де a_x, a_y – проекції вектора швидкості на осі x та y відповідно; $\dot{V}_x, \dot{V}_y$ – перші похідні за часом від відповідних проекцій швидкості точки; $\ddot{x}, \ddot{y}$ - другі похідні за часом від відповідних координат точки; a – модуль прискорення точки; $\overline{a}_x, \overline{a}_y$ – складові вектора прискорення уздовж осей x та y.

Вектор прискорення $\overline{a}$ завжди напрямлений в бік угнутості траєкторії (рис. 1.4).

1.3. Натуральний спосіб

При натуральному способі задається:

1) траєкторія точки;
2) початок відліку з зазначенням додатного напрямку відліку;
3) закон руху точки уздовж траєкторії:

$$\sigma = \sigma(t)\,, \tag{1.9}$$

де σ – дугова координата (криволінійна координата, що відлічується уздовж дуги траєкторії) (рис. 1.5).

Швидкість точки визначається за формулами:

$$V_\tau = \dot{\sigma}\,; \tag{1.10}$$

$$V = \left|V_\tau\right|, \tag{1.11}$$

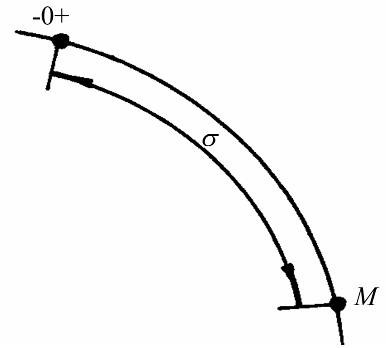


Рис. 1.5

де $V_\tau -$ проекція швидкості на вісь τ дотичної до траєкторії (якщо $V_\tau > 0$, то вектор швидкості $\overline{V}$ напрямлений в бік додатного відліку дугової координати (рис. 1.6,а), якщо $V_\tau < 0 -$ в бік від'ємного відліку (рис. 1.6,б); V – модуль швидкості точки; $\dot{\sigma} -$ перша похідна за часом від дугової координати; $\overline{V}_\tau -$ складова швидкості точки уздовж дотичної (збігається з вектором швидкості $\overline{V}$).

Прискорення точки визначається за формулами:

$$a_\tau = \dot{V}_\tau \ ; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} \ ; \tag{1.12}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \ , \tag{1.13}$$

де $a_\tau, a_n -$ відповідно проекції прискорення точки на вісь дотичної τ (має назву *дотичне прискорення*) та вісь головної нормалі *n* (має назву *нормальне прискорення*). Дотичне і нормальне прискорення характеризують бистроту зміни швидкості точки за величиною і напрямом відповідно; $\tau, n -$ осі натуральної системи координат; $\dot{V}_\tau -$ перша похідна за часом від проекції швидкості на дотичну; $\rho -$ радіус кривизни траєкторії у точці *M,* що розглядається; $\overline{a}_\tau, \overline{a}_n -$ складові прискорення точки уздовж осей τ та *n* (рис. 1.7).

Треба зазначити, що коли a_τ >0, то складова $\overline{a}_\tau$ напрямлена в бік додатного відліку дугової координати (рис. 1,7,а), якщо $a_\tau < 0$ – в бік від'ємного відліку (рис. 1.7,б). Якщо знаки a_τ та V_τ збігаються (рис. 1.7,а), то рух точки буде *прискореним* (при цьому вектори $\overline{a}_\tau$ та

$\overline{V}$ будуть спрямовані в один бік), якщо знаки a_τ та V_τ неоднакові, то рух точки буде *сповільненим* (при цьому вектори $\overline{a}_\tau$ та $\overline{V}$ будуть спрямовані в різні боки). Якщо $a_\tau = 0$ у будь-який момент часу, то рух точки буде *рівномірним* (при цьому: прискорення $a = 0$, якщо точка буде рухатись по прямолінійній траєкторії; прискорення буде збігатися з нормальним прискоренням $\overline{a} = \overline{a}_n$, якщо точка буде рухатись по криволінійній траєкторії). При рівномірному русі модуль швидкості точки буде сталим ($\overline{V} = const$).

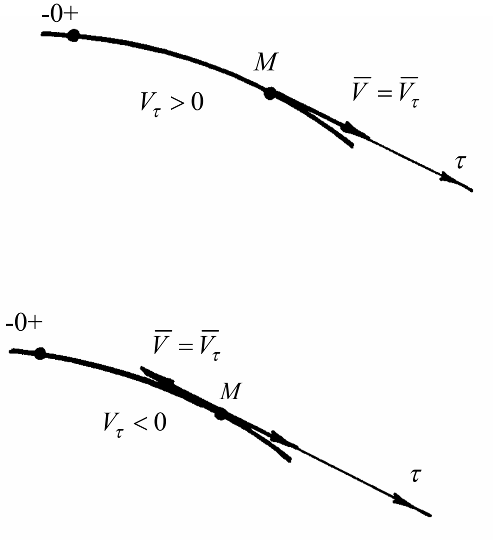
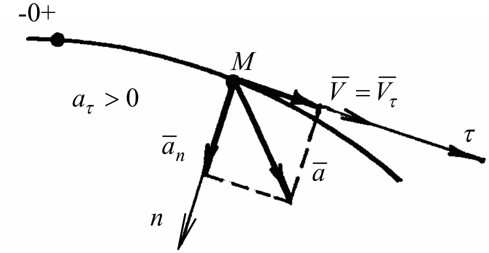


Рис. 1.6.

У випадку, коли $a_\tau = const$, рух точки буде рівнозмінним (рівноприскореним, якщо $a_\tau > 0$, і рівносповільненим у разі $a_\tau < 0$).

Якщо $a_{\tau 1} = 0$ у заданий момент часу t_1, проте $a_\tau \neq const$, то це визначає екстремальну точку, в якій відбувається зміна характеру руху: із сповільненого на прискорений або з прискореного на сповільнений (модуль швидкості досягає в цій точці відповідно мінімального або максимального значення).



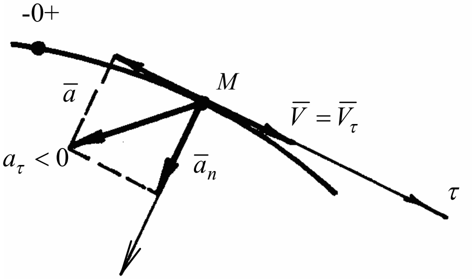


Рис. 1.7

Приклад 1.1.

За заданими рівняннями руху точки (x, y – у сантиметрах)

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t - 3t^2 \end{cases} \tag{1.14}$$

визначити її траєкторію, швидкість, прискорення, дотичне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії в момент часу, коли точка знаходиться на осі OX. Одержані результати зобразити на рисунку і зробити висновок.

Розв'язання.

1. Визначимо траєкторію руху точки. Для цього виключимо параметр часу t з рівнянь руху. Виразимо час із першого рівняння руху (1.14):

$$t = \frac{x}{3} \tag{1.15}$$

і підставимо в друге рівняння:

$$y = 4\frac{x}{3} - 3\frac{x^2}{3^2}$$

або $$y = \frac{4x - x^2}{3}. \qquad (1.16)$$

Отже, рівнянням траєкторії є парабола. Зобразимо параболу на рисунку (рис. 1.8), збудовуючи її, наприклад, по точках.

2. Знайдемо положення точки на траєкторії, коли ордината $y = 0$:

$$4t - 3t^2 = 0$$

або $$t(4 - 3t) = 0. \qquad (1.17)$$

Корені цього квадратного рівняння $t = 0$; $t = \frac{4}{3}c$. Визначимо координату x в момент часу $t_1 = \frac{4}{3}c$:

$$x\Big|_{t=\frac{4}{3}} = 3t_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \text{ (см)}. \qquad (1.18)$$

Зобразимо точку M_1 з координатами (4; 0) на траєкторії (рис. 1.8).

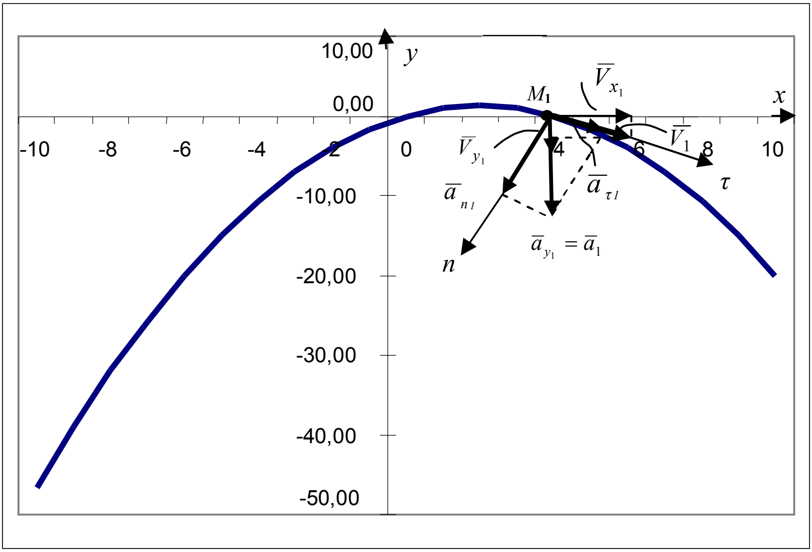


Рис. 1.8

3. Знайдемо швидкість точки. Для цього спочатку визначимо проекції швидкості на осі координат:

$$V_x = \dot{x} = 3 \ \text{(см/с)}, \tag{1.19}$$

$$V_y = \dot{y} = 4 - 3 \cdot 2t = 4 - 6t. \tag{1.20}$$

Для заданого моменту часу t_1

$$V_{x_1} = 3 \text{ (см/с)}, \quad V_{y_1}\Big|_{t=\frac{4}{3}} = 4 - 6 \cdot \frac{4}{3} = 4 - 8 = -4 \text{ (см/с)}.$$

Модуль швидкості визначимо за проекціями швидкості на осі координат:

$$V_1 = \sqrt{V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \ \text{(см/с)}. \tag{1.21}$$

Зобразимо складові швидкості $\overline{V}_{x_1}, \overline{V}_{y_1}$ на рисунку (рис. 1.8), відкладаючи їх з точки M_1 відповідно зі знаками проекцій V_{x_1}, V_{y_1} у масштабі швидкостей (відзначимо, що він може і не збігатися з масштабом віддалей). Проекція V_{x_1} додатна, тому складову $\overline{V}_{x_1}$ відкладаємо у напрямку додатного відліку координати x. Проекція V_{y_1} від'ємна, тому складову $\overline{V}_{y_1}$ відкладаємо у напрямку від'ємного відліку координати y. Вектор швидкості $\overline{V}_1$ зображаємо діагоналлю прямокутника, побудованого на складових $\overline{V}_{x_1}, \overline{V}_{y_1}$ як на сторонах. При правильних розрахунках та побудовах вектор швидкості $\overline{V}_1$ повинен бути напрямленим по дотичній до траєкторії в точці M_1.

4. Знайдемо прискорення точки. Визначимо спочатку проекції прискорення на осі координат:

$$a_x = \dot{V}_x = (3)' = 0; \tag{1.22}$$

$$a_y = \dot{V}_y = 6 \ \text{(см/с}^2\text{)}. \tag{1.23}$$

Для заданого моменту часу t_1 отримаємо

$$a_{x_1} = 0, \ a_{y_1} = 6 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Модуль прискорення визначимо за проекціями швидкості на осі координат:

$$a_1 = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2} = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6 \ \text{(см/с}^2\text{)}. \tag{1.24}$$

Зобразимо складові прискорення $\overline{a}_{x_1}, \overline{a}_{y_1}$ на рисунку (рис. 1.8), відкладаючи їх з точки M_1 відповідно зі знаками проекцій a_{x_1}, a_{y_1} у масштабі прискорень (який може і не збігатися з масштабом швидкостей та віддалей). Проекція a_{y_1} від'ємна, тому складову $\overline{a}_{y_1}$ відкладаємо у напрямку від'ємного відліку координати *y*. Вектор прискорення $\overline{a}_1$ зображаємо діагоналлю прямокутника, побудованого на складових $\overline{a}_{x_1}, \overline{a}_{y_1}$ як на сторонах. У даному прикладі вектор $\overline{a}_1$ збігається зі складовою $\overline{a}_{y_1}$. При правильних розрахунках та будуваннях вектор прискорення $\overline{a}_1$ повинен бути напрямленим в бік угнутості траєкторії.

5. Знайдемо дотичне прискорення точки. Для цього можна використати формулу

$$a_\tau = \dot{V}_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \qquad (1.25)$$

Для заданого моменту часу t_1

$$a_{\tau_1} = \frac{V_{x_1} a_{x_1} + V_{y_1} a_{y_1}}{V_1} = \frac{3\cdot 0 + (-4)\cdot(-6)}{5} = 4{,}8 \ \text{(см/с}^2\text{)}. \qquad (1.26)$$

Зауваження 1. При визначенні a_{τ_1} було враховано, що $V_{\tau_1} = V_1$, тому що величина швидкості V_1 не містить в собі знак модуля.

Зауваження 2. При визначенні a_{τ_1} за допомогою проекцій V_{x_1}, V_{y_1}, a_{x_1}, a_{y_1} краще використовувати точні значення цих величин, а не приблизні.

6. Знайдемо нормальне прискорення точки. Для цього використаємо формулу (1.10), з якої виходить, що

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \qquad (1.27)$$

Для заданого моменту часу t_1

$$a_{n_1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau_1}^2} = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = 3{,}6 \ \text{(см/с}^2\text{)}. \qquad (1.28)$$

На рисунку дотичне й нормальне прискорення можна побудувати, якщо провести осі дотичної τ (яку можна побудувати як продовження вектора швидкості $\overline{V}_1$) та головної нормалі *n* (що перпендикулярна осі τ і напрямлена в бік угнутості траєкторії) і спроектувати вектор прискорення на ці осі. Величини проекцій a_{τ_1}, a_{n_1}, що виміряні з рисунка (з урахуванням масштабу), повинні збігатися зі значеннями, визначеними за формулами (1.26), (1.28).

7. Радіус кривизни траєкторії визначимо, використовуючи другу з формул (1.12):

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}. \qquad (1.29)$$

Для заданого моменту часу t_1

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n_1}} = \frac{5^2}{3,6} = 6,9 \text{ (см)}.$$

Висновок: Точка рухається уздовж параболи за стрілкою годинника (на це указує напрямок вектора швидкості $\overline{V_1}$) прискорено, оскільки, згідно з (1.25), $a_\tau == \frac{3 \cdot 0 + (4-6t)\cdot(-6)}{\sqrt{3^2 + (4-6t)^2}} \neq const$, при цьому $a_{\tau 1} > 0$. Лінія вектора прискорення напрямлена до центру угнутості, що відповідає визначенню прискорення точки.

Відповідь: в момент часу t_1: $x_1 = 4$ см; $y_1 = 0$ см; $V_1 = 5$ см/с;
$a_1 = 6$ см/с^2; $a_{\tau 1} = 4,8$ см/с^2; $a_{n1} = 3,6$ см/с^2; $\rho_1 = 6,9$ см.

Завдання до теми 1

За заданими рівняннями руху точки (табл. 1.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$ – визначити її траєкторію, та для моменту часу t_1 знайти положення точки на траєкторії $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$, її швидкість V_1, прискорення a_1, дотичне $a_{\tau 1}$ і нормальне a_{n1} прискорення, радіус кривизни траєкторії ρ_1, а також зробити висновок про властивості руху точки. Одержані результати зобразити на рисунку.

Примітка: У варіантах 2,4,8,14,16,20,22 момент часу t_1 треба визначити з умови, що наведена в останній колонці.

Таблиця 1.1

№ варіанта	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	для моменту часу t (сек.), що дорівнює (коли)
1	$4-4\cos t$	$3\sin t$	$\frac{\pi}{4}$
2	$-4t$	$2t^2-8t$	$\vec{V} // OX$
3	$3\sin t-2$	$1-3\cos t$	$\frac{\pi}{3}$
4	$4-t^2$	$2t^2+6$	точка знаходиться на осі OY
5	$1-2\cos t$	$\sin t+2$	$\frac{\pi}{2}$
6	$3/(t-2)$	$8-4t$	3
7	$-5-6\sin t$	$6\cos t+1$	$\pi/4$
8	$3t$	t^2-4	точка знаходиться на осі OX
9	$2-3\cos t$	$4\sin t$	$\frac{\pi}{6}$
10	$2t^2+2$	$3-t^2$	2
11	$1+2\sin t$	$2\cos t$	$2\frac{\pi}{4}$
12	$-3t$	$-\frac{3}{t}$	2
13	$2\cos t+1$	$2+\sin t$	$\frac{\pi}{6}$
14	$2t-t^2$	t	$\vec{V} // OY$
15	$1-\sin t$	$\cos t$	$\frac{\pi}{3}$
16	$5+t^3$	t^3-1	точка знаходиться на осі OX

Прод. табл. 1.1

№ варіанта	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	для моменту часу t (сек.), що дорівнює (коли)
17	$4\cos t$	$2\sin t + 1$	$\frac{\pi}{2}$
18	$1/(2t+2)$	$t+1$	2
19	$2 - 5\sin t$	$5\cos t$	$\frac{\pi}{4}$
20	$2t$	$4t^2 - 4t$	$\vec{V} // OX$
21	$2\cos t - 3$	$1 - 4\sin t$	$\frac{\pi}{3}$
22	$9 - t^2$	$t^2 - 5$	точка знаходиться на осі OY
23	$5 - 4\sin t$	$4\cos t$	$\frac{\pi}{6}$
24	$8/t$	$t/4$	6
25	$3 - 3\cos t$	$2\sin t + 2$	$\frac{\pi}{2}$
26	$4t^2 - 2t - 7$	$7t^2 - \frac{7}{2}t - 16$	5
27	$2 - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$3\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 1$	4
28	$2\cos(\pi t)$	$6t$	2
29	$5 - 4\cos\left(\frac{\pi t^2}{4}\right)$	$4\sin\left(\frac{\pi t^2}{4}\right)$	$\frac{\pi}{2}$
30	$4 - 3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$\frac{3}{4}\pi$

2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Це рух твердого тіла, при якому в тілі є пряма, всі точки якої нерухомі під час руху. Ця пряма є віссю обертання. Положення тіла визначається кутом φ повороту тіла навколо осі обертання (кут вимірюється в радіанах):

$$\varphi = \varphi(t)\,. \qquad (2.1)$$

Кутова швидкість тіла ω дорівнює першій похідній від кута повороту за часом (ω вимірюється в рад/с або с$^{-1}$):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}\,. \qquad (2.2)$$

Кутове прискорення тіла ε дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту за часом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}\,. \qquad (2.3)$$

(ε вимірюється в рад/с^2 або с$^{-2}$).

У техніці кутову швидкість задають числом обертів за хвилину і позначають n (частота обертання). Переведення частоти обертання n (об/хв) в ω (рад/с) проводиться за формулою

$$\omega = \pi \cdot n / 30\,. \qquad (2.4)$$

Рівномірне обертання:

$$\varepsilon = 0; \quad \omega = \omega_0 = const\,; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t\,. \qquad (2.5)$$

Рівнозмінне обертання:

$$\varepsilon = const; \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t\,; \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2\,, \qquad (2.6)$$

де $\omega_0; \varphi_0$ – відповідно початкова кутова швидкість і початковий кут повороту при $t = 0$.

Кут повороту φ, кутова швидкість ω і кутове прискорення ε характеризуються рух твердого тіла в цілому.

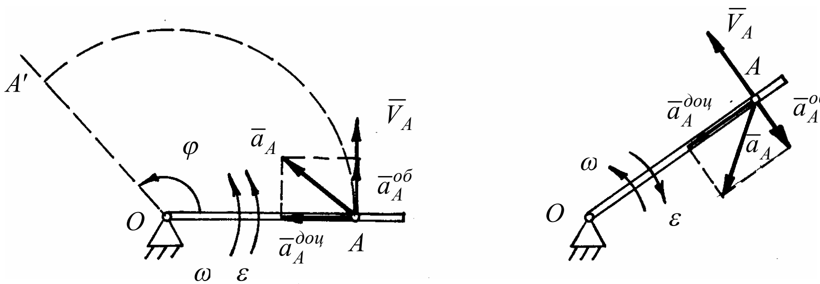
Формули, за допомогою яких визначаються кінематичні величини будь-якої точки тіла (рис. 2.1):

- переміщення точки по колу – дуга $AA' = AO \cdot \varphi$; (2.7)
- лінійна швидкість точки A: $V_A = \omega \cdot AO$, (2.8)

при цьому вектор $\overline{V}_A \perp AO$ і напрямлений відповідно до «стрілки» ω;

- обертальне прискорення точки A: $a_A^{об} = \varepsilon \cdot AO$, (2.9)

вектор $\overline{a}_A^{об} \perp AO$ і напрямлений відповідно до «стрілки» ε;



а)

б)

Рис. 2.1

- доцентрове прискорення точки A: $a_A^{доц} = \omega^2 \cdot AO$, (2.10)

  вектор $\overline{a}_A^{доц}$ напрямлений по відрізку AO від точки A до точки O;
- повне прискорення

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{об}\right)^2 + \left(a_A^{доц}\right)^2} = AO \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \qquad (2.11)$$

де AO – відстань від точки до осі обертання.

Якщо обертальний рух тіла прискорений (рис. 2.1,а), то вектори $\vec{V}_A$ і $\overline{a}_A^{об}$ мають однаковий напрям, якщо рух сповільнений - то напрями векторів протилежні (рис. 2.1,б).

Передача обертання від одного твердого тіла до другого здійснюється за допомогою зубчастого чи фрикційного зачеплення двох коліс (рис. 2.2,а,б), або за допомогою пасової передачі (рис. 2.2,в).

Кутові швидкості та кутові прискорення коліс або шківів обернено пропорційні радіусам коліс $(r_1; r_2)$, або діаметрам $(d_1; d_2)$, або кількості зубців $(z_1; z_2)$:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}; \qquad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (2.10)$$

Формули (2.10) витікають із співвідношень для швидкості і обертального прискорення точки дотику A: $V_A = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$, $a_A^{об} = \varepsilon_1 \cdot r_1 = \varepsilon_2 \cdot r_2$.

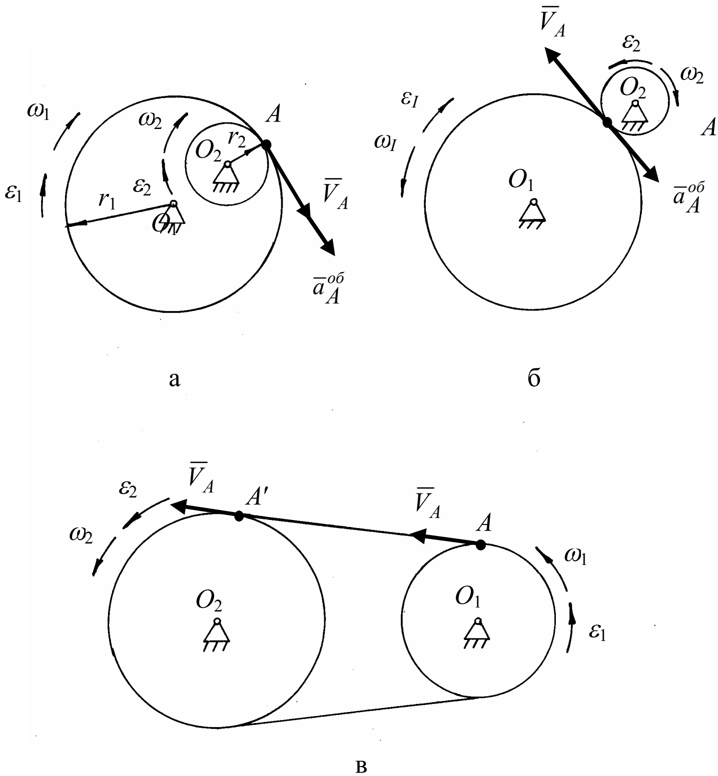


Рис. 2.2

Завдання до теми 2

Вантаж 1 рухається згідно з рівнянням

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0 ,$$

де t – час, с; C_0, C_1, C_2 – деякі сталі.

У момент часу $t = 0$ координата вантажу x_0; швидкість – V_0, а при $t = t_2$ його координата x_2. Знайти сталі C_0, C_1, C_2. Визначити в момент часу t_1 швидкість та прискорення вантажу і точки M колеса механізму.

Чисельні значення даних наведені у табл. 2.1, схеми варіантів на рис. 2.3, 2.4, 2.5.

Таблиця 2.1

Варі-ант	Розміри, см				Координати і швидкість			Час, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0 , см	V_0 , см	x_2 , см	t_2	t_1
1	60	45	36	-	2	12	173	3	2
2	80	-	60	45	5	10	41	2	1
3	100	60	75	-	8	6	40	4	2
4	58	45	60	-	4	4	172	4	3
5	80	-	45	30	3	15	102	3	2
6	100	60	30	-	7	16	215	4	2
7	45	35	105	-	8	5	124	4	3
8	35	10	10	-	6	2	110	3	2
9	40	30	15	-	10	7	48	2	1
10	15	-	40	35	5	3	129	4	3
11	40	25	20	-	9	8	65	2	1
12	20	15	10	-	5	10	175	3	2
13	30	20	40	-	7	0	550	5	2
14	15	10	15	-	6	3	80	2	1
15	15	8	16	-	5	2	180	4	2
16	20	15	15	-	4	6	220	4	3
17	15	10	20	-	8	4	44	2	1
18	20	15	10	-	3	12	210	4	1
19	15	10	20	-	5	10	490	5	3
20	25	15	10	-	10	8	225	3	1
21	20	10	30	10	6	5	356	5	2
22	40	20	35	-	7	6	103	2	1
23	40	30	30	15	5	9	192	3	2
24	30	15	40	20	9	8	105	4	2
25	50	20	60	-	8	4	119	3	2
26	32	16	32	16	6	14	860	4	2
27	40	18	40	18	5	10	195	2	1
28	40	20	40	15	8	5	348	3	2
29	25	20	50	25	4	6	32	2	1
30	30	15	20	-	10	7	128	2	1

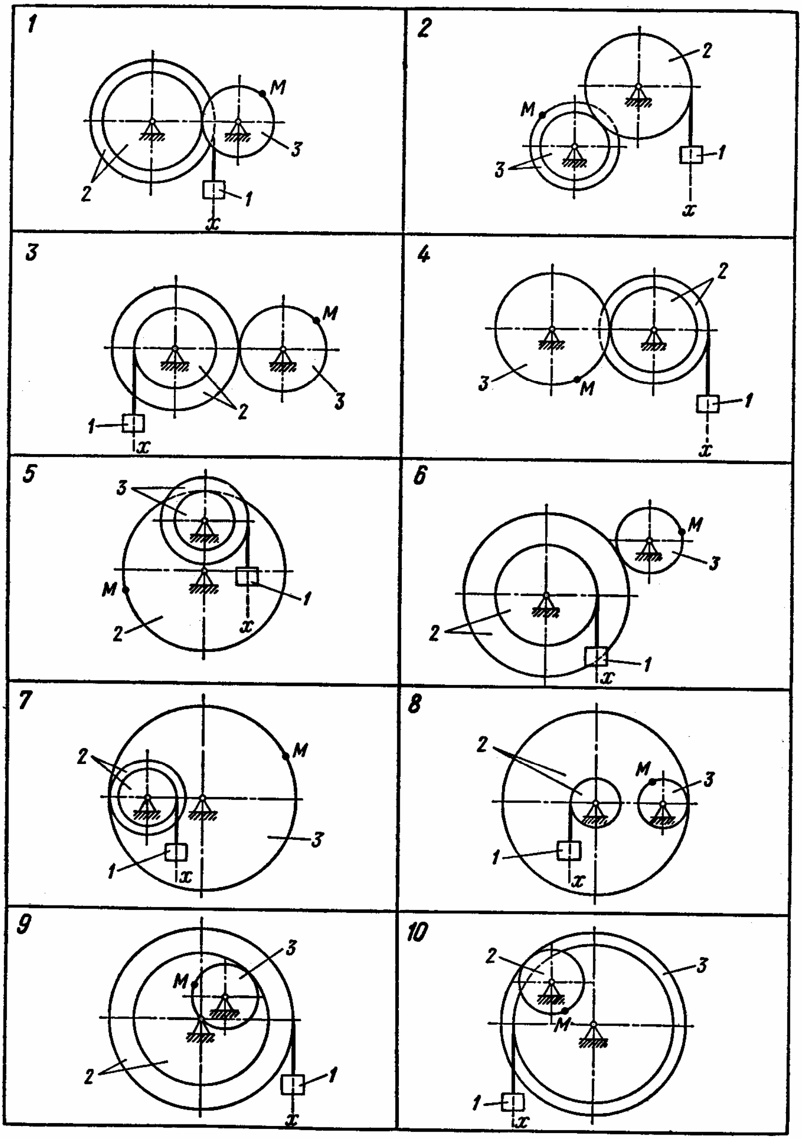

1
M
3
2
1
x
2
2
M
3
1
x
3
M
2
3
1
x
4
2
3
M
1
x
5
3
M
1
x
2
6
M
3
2
1
x
7
2
M
3
1
x
8
2
M
3
1
x
9
3
M
2
1
x
10
2
3
M
1
x

Рис. 2.3

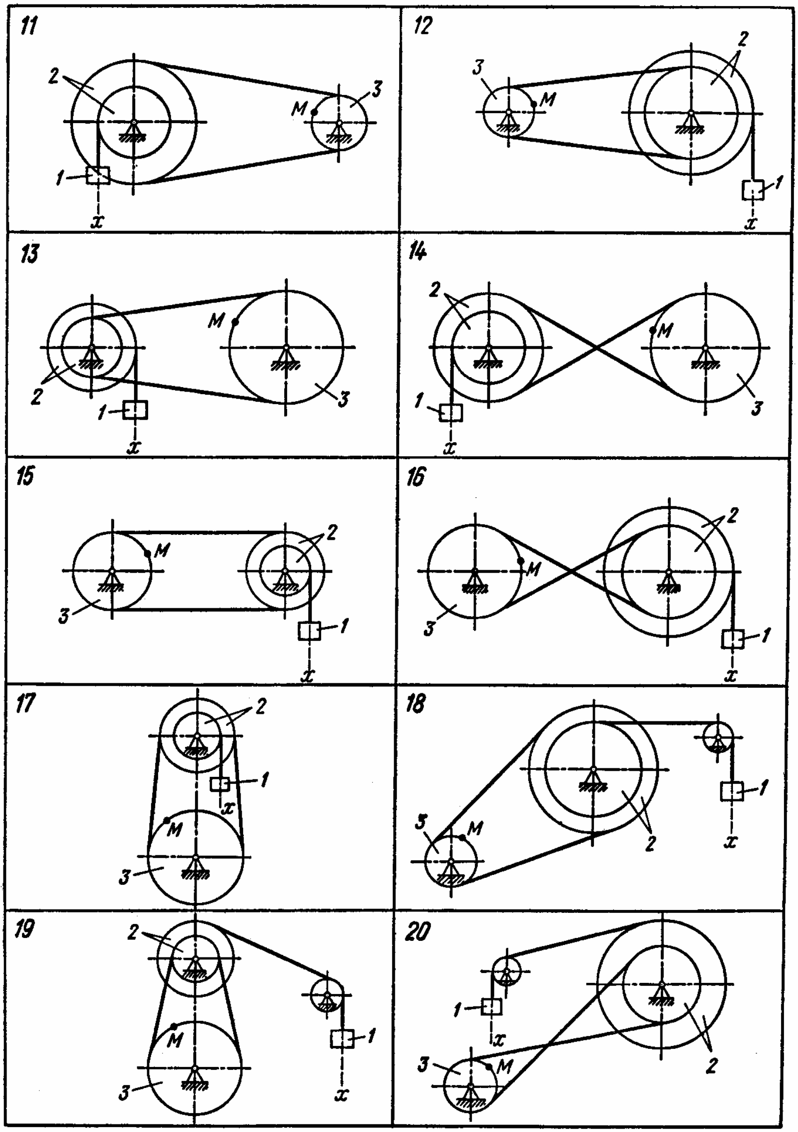

11
2
M
3
1
x
12
2
3
M
1
x
13
M
2
3
1
x
14
2
M
1
3
x
15
M
2
3
1
x
16
2
M
3
1
x
17
2
1
x
M
3
18
1
3
M
2
x
19
2
M
1
3
x
20
1
x
3
M
2

Рис. 2.4

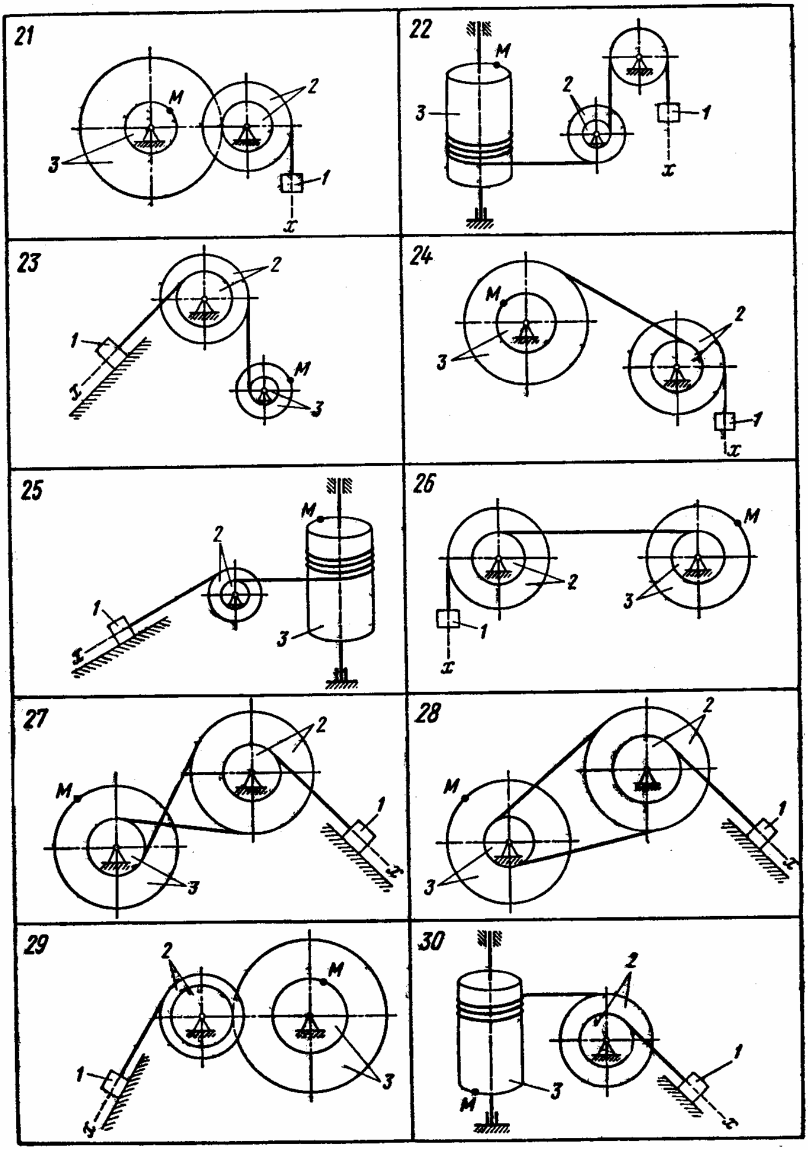

21
M
2
3
1
x
22
M
3
2
1
x
23
2
1
x
M
3
24
M
2
3
1
x
25
M
2
1
x
3
26
M
2
3
1
x
27
2
M
1
3
x
28
2
M
1
3
x
29
2
M
1
3
x
30
2
1
3
M
x

Рис. 2.5

Приклад виконання завдання (рис. 2.6):

r_2 = 25 см; R_2 = 50 см; r_3 = 40 см; R_3 = 65 см; x_0 = 14 см;

V_0 = 5 см/с; x_2 = 168 см; t_2 = 2 с; t_1 = 1 с.

Визначити рівняння руху вантажу 1, а також швидкості та прискорення вантажу та точки M в момент часу t_1.

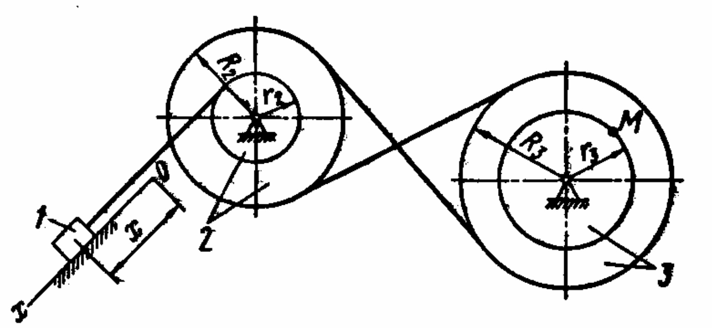


Рис. 2.6

Розв'язання.

Рівняння руху вантажу 1

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0 .$$

Маємо у моменти часу $t = 0$; t_2 = 2 с; $x_0 = 14$ см; $V_0 = \dot{x}_0 /_{t=0} = 5$ см/с; x_2 = 168 см.

Підставивши числові значення, отримаємо:

$$C_0 = 14 \text{ см; } C_1 = 5 \text{ см/с; } C_2 = \frac{(x_2 - C_0 - C_1 t_2)}{t_2^2} = 36 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Рівняння руху вантажу 1

$$x = 36 \cdot t^2 + 5t + 14 \text{ (см)}.$$

Швидкість вантажу

$$V = \dot{x} = (72t + 5)\Big|_{t_1=1} = 77 \text{ см/с}.$$

Прискорення вантажу $a = \ddot{x} = 72$ см/с^2.

Згідно зі схемою механізму швидкість точки A барабана

$$V_A = V = \omega_2 \cdot r_2 .$$

Крім того, маємо $\dfrac{\omega_2}{\omega_3} = \dfrac{R_3}{R_2}$.

Звідки $\omega_3 = \omega_2 \dfrac{R_2}{R_3} = V \dfrac{R_2}{(r_2 R_3)} = (2{,}22t + 0{,}154)\Big|_{t_1=1} = 2{,}37$ рад/с.

Кутове прискорення колеса 3

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2{,}22 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість точки M, її обертальне, доцентрове й повне прискорення визначаються так:

$$V_{\text{м}} = r_3 \cdot \omega_3 = 40 \cdot 2{,}37 = 94{,}8 \text{ см/с};$$

$$a_{\text{м}}^{об} = r_3 \cdot \varepsilon_3 = 40 \cdot 2{,}22 = 88{,}8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{\text{м}}^{доц} = r_3 \cdot \omega_3^2 = 40 \cdot 2{,}37^2 = 225 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{\text{м}} = \sqrt{\left(a_{\text{м}}^{об}\right)^2 + \left(a_{\text{м}}^{доц}\right)^2} = 242 \text{ см/с}^2.$$

Результати розрахунків зображені на рис. 2.7 і зведені в табл. 2.2.

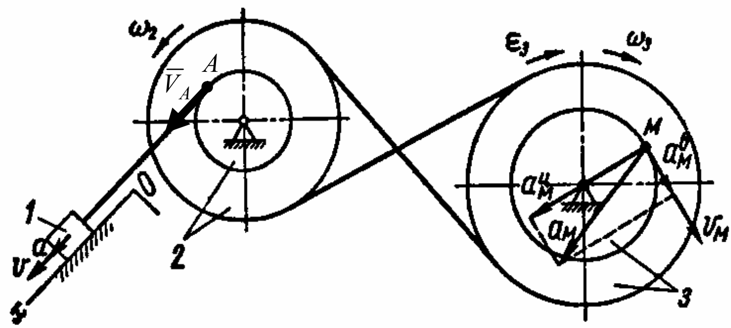


Рис. 2.7

Таблиця 2.2

V	a	ω_3	ε_3	$V_{\text{м}}$	$a_{\text{м}}^{об}$	$a_{\text{м}}^{доц}$	$a_{\text{м}}$
см/с	см/с^2	рад/с	рад/с^2	см/с	см/с^2	см/с^2	см/с^2
77	72	2,37	2,22	94,8	88,8	225	242

3. Кінематичний аналіз плоского механізму

3.1. Визначення швидкостей точок і кутових швидкостей ланок плоского механізму

Якщо ланка механізму (стержень, колесо або ін.) здійснює плоскопаралельний рух, то для визначення швидкостей точок і кутової швидкості ланки можна скористатися уявленням про миттєвий центр швидкостей (МЦШ). МЦШ – це точка, пов'язана з розглядуваною ланкою, швидкість якої у даний момент часу дорівнює нулю. Для визначення положення МЦШ у загальному випадку треба знати напрями швидкостей (або траєкторії) двох точок розглядуваної ланки. МЦШ (позначимо його літерою *P*) знаходиться у точці перетину перпендикулярів, проведених з цих точок до їх швидкостей (або до дотичних до траєкторій руху точок) (рис. 3.1). Швидкість будь-якої іншої точки цієї ланки, наприклад, *C,* перпендикулярна до відрізка *CP,* що з'єднує цю точку з МЦШ: $\overline{V}_c \perp CP$. Швидкості точок зв'язані між собою і з кутовою швидкістю ланки співвідношенням:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_c}{CP} = \ldots \tag{3.1}$$

При цьому напрями швидкостей точок повинні відповідати напряму кутової швидкості ланки та навпаки.

В окремому випадку, коли швидкості двох точок, наприклад *A* і *B,* паралельні та відрізок AB не $\perp \overline{V}_A$, МЦШ не існує (формально знаходиться у нескінченності) (рис. 3.2). У цьому разі

$$\omega = \frac{V_A}{\infty} = 0, \tag{3.2}$$

а швидкості усіх точок ланки паралельні між собою і однакові за величиною (як при поступальному русі):

$$V_A = V_B = V_C = \ldots \tag{3.3}$$

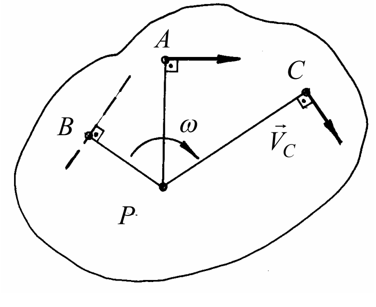


Рис. 3.1

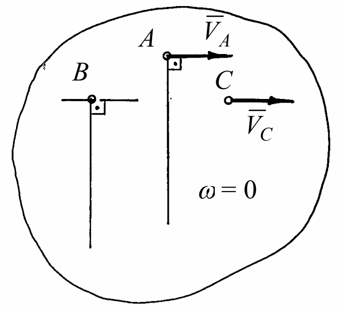


Рис. 3.2

3.2. Визначення прискорень точок і кутових прискорень ланок плоского механізму

Якщо ланка механізму здійснює плоскопаралельний рух, то прискорення будь-якої точки *B* цієї ланки дорівнює геометричній сумі прискорення точки, вибраної за полюс (наприклад, точки *A*, прискорення якої відомо або знаходиться з розрахунку попередньої ланки), і прискорення точки *B* при обертанні ланки навколо полюса *A* (рис. 3.3):

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{AB} = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}\,; \tag{3.4}$$

$$\overline{a}_{BA}^{доц} = \omega^2 \cdot BA\,; \tag{3.5}$$

$$\overline{a}_{BA}^{об} = \varepsilon \cdot BA\,, \tag{3.6}$$

де ω, ε – кутова швидкість і кутове прискорення ланки, якій належать точки *A* і *B*.

При цьому вектор $\overline{a}_{BA}^{доц}$ напрямлений по відрізку *BA* від точки *B* до полюса *A*, вектор $\overline{a}_{BA}^{об} \perp BA$ і напрямлений згідно зі «стрілкою» кутового прискорення ε. Якщо точка *A* рухається по колу, то формулу (3.4) можна записати у вигляді:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^{доц} + \overline{a}_A^{об} + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}\,. \tag{3.7}$$

Якщо і точка *B* рухається по колу, то (3.4) приймає вигляд:

$$\overline{a}_B^{доц} + \overline{a}_B^{об} = \overline{a}_A^{доц} + \overline{a}_A^{об} + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}\,. \tag{3.8}$$

Якщо траєкторія точки *B* невідома, то формула (3.7) записується у вигляді:

$$\overline{a}_{BX} + \overline{a}_{BY} = \overline{a}_A^{доц} + \overline{a}_A^{об} + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}\,, \tag{3.9}$$

де $\overline{a}_{BX}, \overline{a}_{BY}$ – складові прискорення точки В уздовж осей *X* та *Y*.

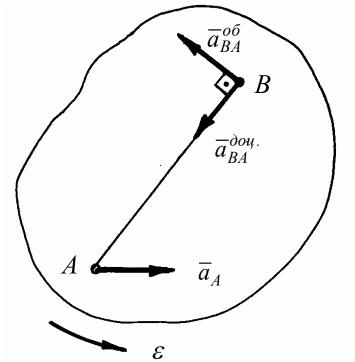


Рис. 3.3

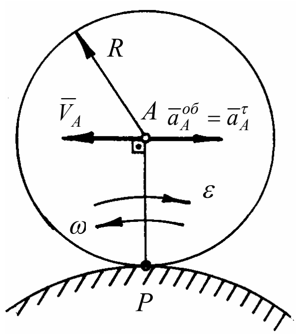


Рис. 3.4

При розв'язанні задач векторні рівняння (3.4), (3.7), (3.8) або (3.9) проектують на осі координат і з одержаних алгебраїчних рівнянь визначають невідомі величини.

Особливості визначення складової $\overline{a}_{BA}^{об}$

1. Якщо ланка являє собою не колесо (а стержень, трикутник або ін.), то кутове прискорення ε, як правило, заздалегідь визначити не можна. В цьому разі вектор $\overline{a}_{BA}^{об}$ зображають $\perp BA$ у будь-який бік. Далі проектують рівняння (3.4), (3.7), (3.8) або (3.9) на осі координат, вважаючи, що модуль $a_{BA}^{об}$ невідомий. З одержаних алгебраїчних рівнянь визначають модуль $a_{BA}^{об}$, а далі з формули (3.6) кутове прискорення ланки:

$$\varepsilon = \frac{\left| a_{BA}^{об} \right|}{BA}, \tag{3.10}$$

напрямлення ε визначається дійсним напрямленням $\overline{a}_{BA}^{об}$ відносно полюса A.

2. Якщо ланка є колесо, що котиться, і відстань від полюса A до МЦШ є сталою (однакова у будь-який момент часу), (рис. 3.4), то кутове прискорення знаходиться таким чином:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(V_A / AP)}{dt} = \frac{1}{AP} \cdot \frac{dV_A}{dt} = \frac{a_A^{\tau}}{AP} = \frac{a_A^{об}}{AP}, \tag{3.11}$$

де $\omega, \varepsilon -$ кутова швидкість і кутове прискорення колеса; $AP = R = const$.

При цьому напрямок ε визначається напрямком «обертання» $\overline{a}_A^{об}$ відносно МЦШ.

3.3. Методика розв'язання задач

При розв'язанні задач треба послідовно розглянути рух окремих ланок механізму і провести розрахунок кожної з них (визначити швидкість і прискорення точки, яка належить одночасно до розглядуваної і наступної ланки). Розрахунок почати з ланки, рух якої є заданим. Якщо ланка виконує обертальний рух (у неї є нерухома точка, наприклад, у вигляді нерухомого шарніра), то будь-яка її точка рухається за колом і для визначення швидкості і прискорення цієї точки треба використовувати формули і закономірності, розглянуті в розділі 2 цієї методички. Якщо ланка виконує плоскопаралельний рух (у неї нема нерухомих точок), треба використовувати формули і закономірності параграфів 3.1 та 3.2.

3.4. Приклад

Плоский механізм складається зі стержнів *OA, AB* і колеса з центром у точці *B,* з'єднаних між собою шарнірами (рис. 3.5). Колесо *B* складається з двох жорстко скріплених між собою дисків. Диск радіуса *r* котиться без ковзання по нерухомій поверхні, *OA* = 20 см, *AB = 40* см, *r* = 10 см, *BC* = 15 см. Стержень *OA* обертається навколо осі O і має у даний момент часу кутову швидкість $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$ і кутове прискорення $\varepsilon_{OA} = 5$ с$^{-2}$. Для заданого положення механізму треба визначити швидкість і прискорення точки *C,* а також кутові швидкості і прискорення ланок механізму.

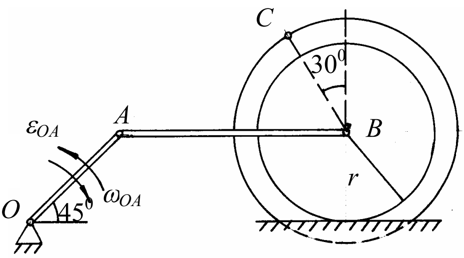


Рис. 3.5

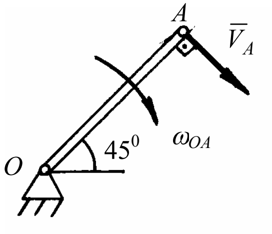


Рис. 3.6

Розв'язання 1. Визначимо швидкість точки *C.*

1) Спочатку розглянемо стержень *OA,* рух якого є заданим. Стержень виконує обертальний рух (оскільки точка *O* нерухома), тому швидкість точки *A* визначається за формулою:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ (см/с)}.$$

Вектор $\overline{V}_A \perp OA$ і напрямлений у бік обертання стержня (за «стрілкою» ω_{OA}) (рис. 3.6).

2) Розглянемо стержень *AB.* Він виконує плоскопаралельний рух (у нього немає нерухомих точок), тому спочатку треба побудувати МЦШ. Швидкість точки *A* знайдемо з розрахунку стержня *OA.* Точка *B* є центром колеса, що котиться по горизонтальній поверхні, тому її траєкторія – горизонтальна лінія (показана на рис. 3.7 пунктирною лінією). Будуємо МЦШ (P_{AB}), як точку перетину перпендикулярів до швидкості $\overline{V}_A$ і швидкості точки *B*, що є горизонтальною (напрямлена по дотичній до траєкторії).

Кутова швидкість стержня *AB* згідно з (3.1) дорівнює

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{V_A}{AB/\cos 45^0} = \frac{V_A \cdot \cos 45^0}{AB} = \frac{40 \cdot 0{,}7}{40} = 0{,}7 \ \ (\text{с}^{-1})$$

і напрямлена відповідно до того, як вектор $\overline{V}_A$ «обертається» навколо МЦШ (P_{AB}). Швидкість точки B

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 0{,}7 \cdot 40 = 28 \ \ (\text{см/с})$$

і напрямлена згідно зі «стрілкою» ω_{AB} .

3) Розглянемо колесо B. Колесо, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні, виконує плоскопаралельний рух (нема нерухомих точок). МЦШ (точка $P_{кол}$) знаходиться в точці дотику з нерухомою поверхнею (рис. 3.8). Кутова швидкість колеса

$$\omega_{кол} = \frac{V_B}{BP_{кол}} = \frac{28}{10} = 2{,}8 \ \ (\text{с}^{-1})$$

і напрямлена за стрілкою годинника (відповідно до «обертання» вектора $\overline{V}_B$ навколо МЦШ ($P_{кол}$)).

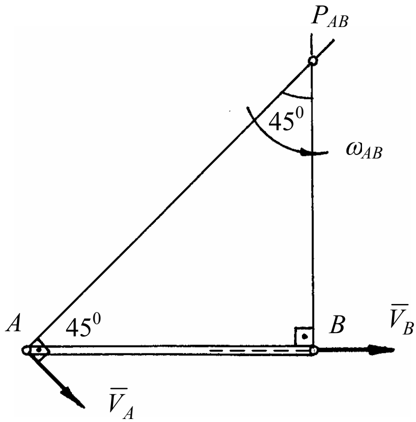


Рис. 3.7

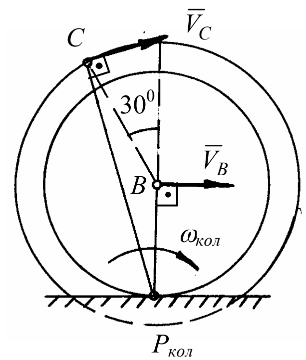


Рис. 3.8

Відрізок $CP_{кол}$ можна визначити з трикутника $BCP_{кол}$ за теоремою косинусів:

$$CP_{кол} = \sqrt{BC^2 + BP_{кол}^2 - 2BP_{кол} \cdot \cos 150^0} =$$

$$= \sqrt{15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot (-0{,}85)} = \sqrt{580} \approx 24 \ \ (\text{см}),$$

тоді

$$V_C = \omega_{кол} \cdot CP_{кол} = 2{,}8 \cdot 24 \approx 67{,}2 \ \ (\text{см/с}).$$

Вектор $\overline{V}_C \perp CP_{кол}$ і напрямлений згідно зі «стрілкою» $\omega_{кол}$.

2. Визначення прискорення точки С.

1) Розглянемо стержень *OA*. Він виконує обертальний рух, тому модулі складових прискорення точки *A* визначаються за формулами (див. главу 2):

$$a_{BA}^{доц} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 4 \cdot 20 = 80 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{BA}^{об} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 20 = 100 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Покажемо (рис. 3.9) напрями складових: вектор $\overline{a}_A^{доц}$ напрямлений уздовж стержня від точки *A* до центра обертання *O*, вектор $\overline{a}_A^{об} \perp OA$ і напрямлений згідно зі «стрілкою» ε_{OA}.

2) Розглянемо стержень *AB*. Він виконує плоскопаралельний рух, тому для визначення прискорення точки *B* використаємо відповідно формулу (3.7) (ця формула відповідає випадку, коли траєкторія точки *A,* яку можна вибрати за полюс, є коло, а траєкторія точки *B* - пряма лінія):

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^{доц} + \overline{a}_A^{об} + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}. \qquad (3.12)$$

Модуль складової $\overline{a}_{BA}^{доц}$ обчислюємо за формулою (3.5):

$$a_{BA}^{доц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0{,}7^2 \cdot 40 = 20 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\overline{a}_{BA}^{доц}$ напрямлений по відрізку *BA* від точки *B* до полюса *A* (рис. 3.10). Модуль складової $\overline{a}_{BA}^{об}$ обчислити поки не можна, тому що невідоме ε_{BA}. У цьому разі зобразимо вектор $\overline{a}_{BA}^{об} \perp BA$ і направимо, наприклад, угору (можна і униз). Оскільки траєкторія точки *B* – пряма лінія (точка *B* є центром колеса, що котиться по горизонтальній поверхні), то вектор $\overline{a}_B$ мусить мати напрямок уздовж цієї прямої. Зобразимо його, наприклад, вліво від точки *B* (можна і вправо).

Виберемо осі координат *X, Y* (наприклад, вісь *X* за стержнем вліво, вісь *Y*-угору) і спроектуємо векторне рівняння (3.12) на ці осі:

$$X\!: \; a_B = a_A^{доц} \cdot \cos 45^0 + a_A^{об} \cdot \cos 45^0 + a_{BA}^{доц}, \qquad (3.13)$$

$$Y\!: \; 0 = -a_A^{доц} \cdot \sin 45^0 + a_A^{об} \cdot \sin 45^0 + a_{BA}^{об}.$$

У системі алгебраїчних рівнянь (3.13) невідомими є модулі прискорень a_B і $a_{BA}^{об}$. З першого рівняння знаходимо прискорення точки *B:*

$$a_B = 80 \cdot 0{,}7 + 100 \cdot 0{,}7 + 20 = 146 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

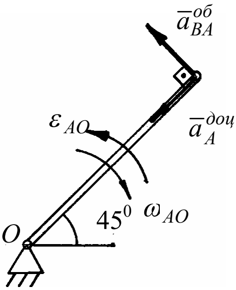


Рис. 3.9

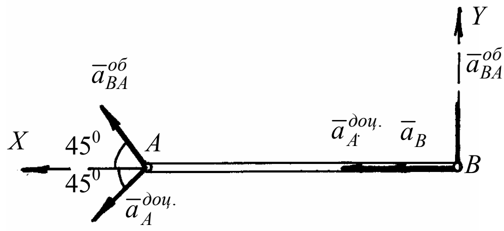


Рис. 3.10

Оскільки $a_B > 0$, то на рисунку вектор $\overline{a}_B$ відповідає дійсному напряму прискорення точки *B*. З другого рівняння знаходимо $a_{BA}^{об}$:

$$a_{BA}^{об} = a_A^{доц} \cdot \sin 45^0 - a_A^{об} \cdot \sin 45^0 = 56 - 70 = -14 \ \ (\text{см/с}^2).$$

Знак «-» означає, що насправді вектор $\overline{a}_{BA}^{об} \perp BA$ і напрямлений униз. Кутове прискорення

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^{об}\right|}{BA} = \frac{14}{40} \approx 0{,}35 \ \ (\text{с}^{-2})$$

і напрямлене за стрілкою годинника (так, як дійсний вектор $\overline{a}_{BA}^{об}$ «обертається» навколо полюса *A*) (рис. 3.11).

3) Розглянемо колесо *B*. Воно виконує плоскопаралельний рух. Оскільки точка В, яку можна вибрати за полюс, рухається по прямій, а траєкторія точки С невідома (на неї не накладено обмежень з боку механізму), то для визначення прискорення точки С використаємо формулу (3.9):

$$\overline{a}_{CX} + \overline{a}_{CY} = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}^{доц} + \overline{a}_{CB}^{об} . \qquad (3.14)$$

Кутове прискорення колеса, що котиться, визначимо за формулою (3.10):

$$\varepsilon_{кол} = \frac{a_B^{\tau}}{BP_{кол}} = \frac{a_B}{BP_{кол}} = \frac{146}{10} = 14{,}6 \ \ (\text{с}^{-2}),$$

де $a_B^{\tau} = a_B$, оскільки траєкторія точки B – пряма лінія.

Напрямлене $\varepsilon_{кол}$ проти стрілки годинника (так, як вектор $\overline{a}_B$ «обертається» навколо МЦШ $P_{кол}$) (рис. 3.12). Модулі складових $\overline{a}_{CB}^{доц}$ і $\overline{a}_{CB}^{об}$ визначимо за формулами (3.5):

$$a_{CB}^{доц} = \omega_{OA}^2 \cdot CB = 2{,}8^2 \cdot 15 = 117{,}6 \ \text{(см/с}^2\text{)};$$

$$a_{CB}^{об} = \varepsilon_{кол} \cdot CB = 14{,}6 \cdot 15 = 219 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\overline{a}_{CB}^{доц}$ напрямлений по відрізку CB від точки C до полюса B, а вектор $\overline{a}_{CB}^{об} \perp CB$ і напрямлений згідно зі «стрілкою» $\varepsilon_{кол}$ навколо полюса B.

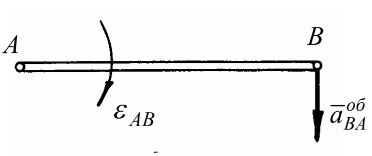


Рис. 3.11

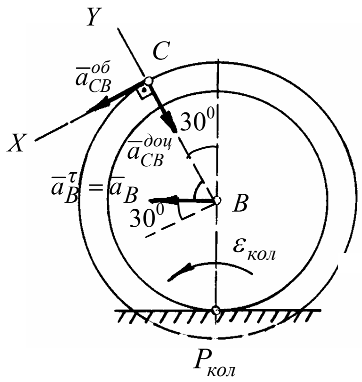


Рис. 3.12

Виберемо осі координат X, Y (рис. 3.12) і спроектуємо векторне рівняння (3.14) на ці осі:

$$X\!: \ a_{CX} = a_B \cdot \cos 30^0 + a_{CB}^{об} = 146 \cdot 0{,}85 + 219 = 343{,}1 \ \text{(см/с}^2\text{)};$$

$$Y\!: \ a_{CY} = a_B \cdot \sin 30^0 - a_{CB}^{доц} = 146 \cdot 0{,}5 - 117{,}6 = -44{,}6 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Модуль прискорення точки *C* находимо за формулою

$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = \sqrt{(343{,}1)^2 + (-44{,}6)^2} \approx 346 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Оскільки $a_{CX} > 0$, $a_{CY} < 0$, то складові прискорення точки *C* напрямлені в бік додатного напряму осі *X* і від'ємного осі *Y*, а вектор $\overline{a}_C$ зображується як діагональ прямокутника, побудованого на складових $\overline{a}_{CX}, \overline{a}_{CY}$ (рис. 3.13).

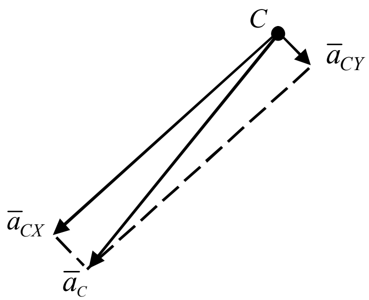


Рис. 3.13

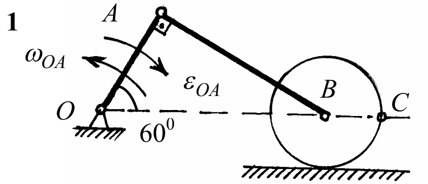
Відповідь: $\omega_{AB} = 0{,}7$ с$^{-1}$; $\omega_{кол} = 2{,}8$ с$^{-1}$; $V_C = 67{,}2$ см/с;
$\varepsilon_{AB} = 0{,}35$ с$^{-2}$; $\varepsilon_{кол} = 14{,}6$ с$^{-2}$; $a_C = 346$ см/с^2.

Завдання до теми 3.

Схеми механізмів та завдання щодо визначення їх кінематичних характеристик наведені на рис. 3.14-3.19.

<table>
<tr><td>

1

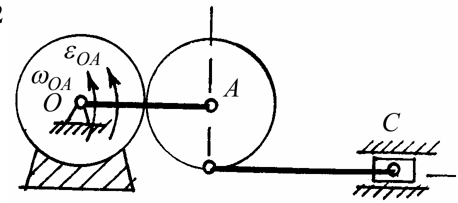


</td><td>

Дано: $OA = 20$ см,
$BC = 10$ см, $\omega_{OA} = 1$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 3$ с$^{-2}$.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
<tr><td>

2

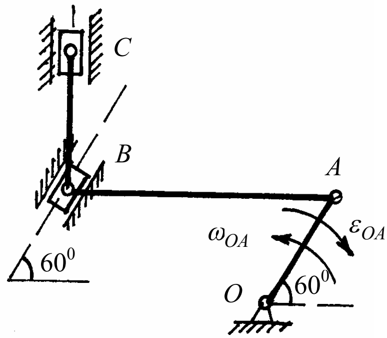


</td><td>

Дано: $OA = 40$ см,
$AB = 20$ см, $BC = 60$ см,
$\omega_{OA} = 2{,}5$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 1$ с$^{-2}$.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
<tr><td>

3

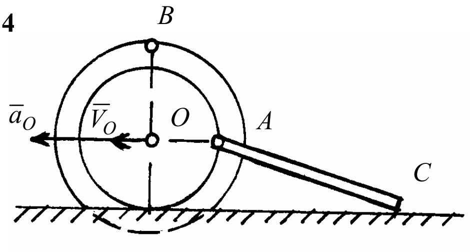


</td><td>

Дано: $OA = 10$ см,
$AB = 40$ см, $BC = 20$ см,
$\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 5$ с$^{-2}$.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
<tr><td>

4

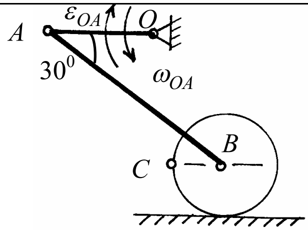


</td><td>

Дано: $OA = 5$ см,
$OB = 10$ см, $AC = 13$ см,
$V_O = 5$ см/с,
$a_O = 10$ см/с^2.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
<tr><td>

5



</td><td>

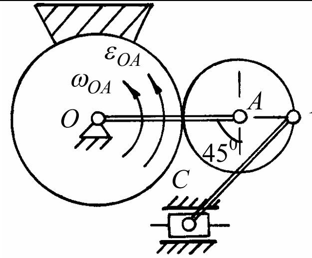
Дано: $OA = 20$ см,
$AB = 50$ см, $BC = 10$ см,
$\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 2{,}5$ с$^{-2}$.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
</table>

Рис. 3.14

<table>
<tr><td>

6

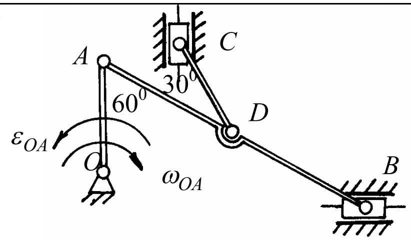


</td><td>

Дано: $OA = 50$ см,
$AB = 20$ см, $BC = 70$ см,
$\omega_{OA} = 5$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 10$ с$^{-2}$.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
<tr><td>

7

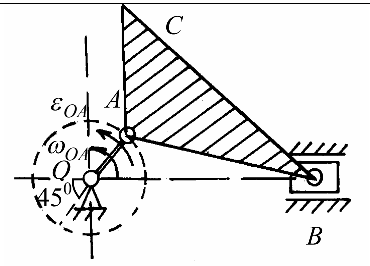


</td><td>

Дано: $OA = 40$ см,
$AB = 100$ см, $AD = DB$,
$DC = 40$ см,
$\omega_{OA} = 0{,}5$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 1$ с$^{-2}$.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
<tr><td>

8

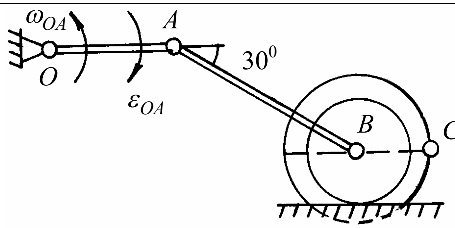


</td><td>

Дано: $OA = 12\sqrt{2}$ см,
$AC = 24$ см,
$AB = 12\sqrt{5}$ см,
$\omega_{OA} = 6$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 3$ с$^{-2}$.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
<tr><td>

9

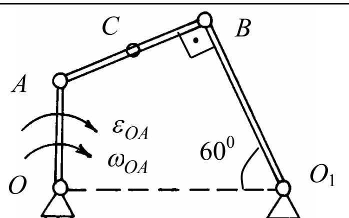


</td><td>

Дано: $OA = 20$ см,
$AB = 40$ см, $r = 10$ см,
$BC = 15$ см,
$\omega_{OA} = 1$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 2$ с$^{-2}$.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
<tr><td>

10



</td><td>

Дано: $OA = 6$ см,
$AB = 12$ см, $AC = 6$ см,
$\omega_{OA} = 12$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 10$ с$^{-2}$.
Визначити: V_C , a_B .

</td></tr>
</table>

Рис. 3.15

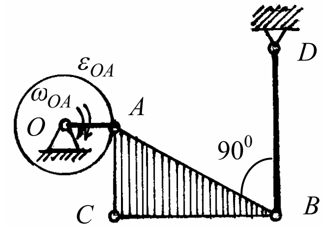
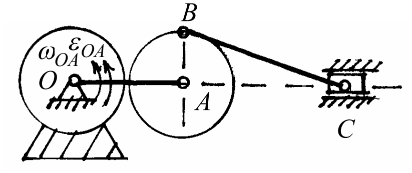
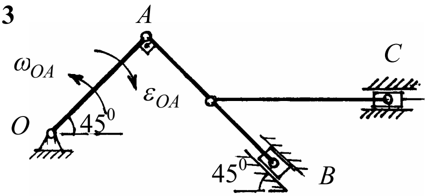
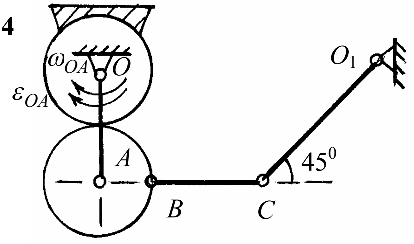
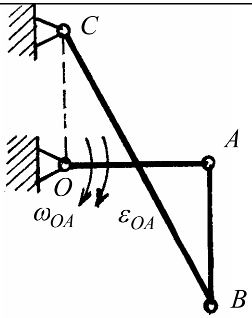
11 	Дано: $OA = 10$ см, $BC = 45$ см, $AC = 15$ см, $BD = 40$ см, $\angle ABC = 90^0$, $\omega_{OA} = 6$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2$ с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
12 	Дано: $OA = 10$ см, $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 3$ с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
13 	Дано: $OA = 30$ см, $AB = 40$ см, $AD = DB$, $DC = 40$ см, $\omega_{OA} = 1$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2$ с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
14 	Дано: $OA = 40$ см, $AB = 20$ см, $BC = 40$ см, $CO_1 = 60$ см, $\omega_{OA} = 3$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 4$ с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
15 	Дано: $OA = 16$ см, $BC = 34$ см, $AB = OC = 15$ см, $\omega_{OA} = 2\pi$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = \pi$ с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .

Рис. 3.16

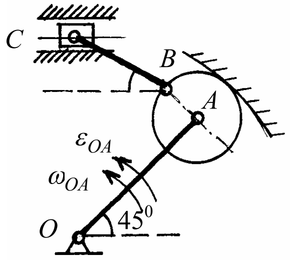
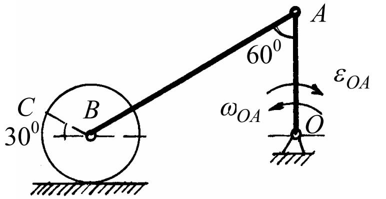
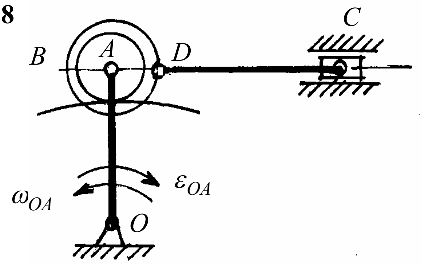
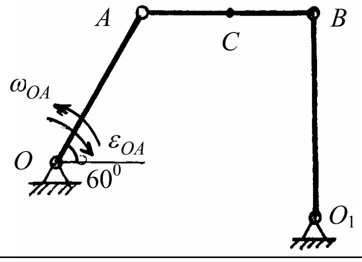
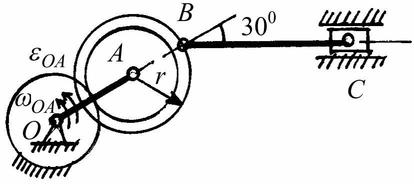
16 	Дано: OA = 80 см, AB = 20 см, BC = 30 см, ω_{OA} = 2 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
17 	Дано: OA = 15см, AB = 30 см, BC = 10 см, ω_{OA} = 4 с$^{-1}$, ε_{OA} = 6 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
18 	Дано: OA = 8 см, AB = 3 см, AD = 4 см, DC = 10 см, ω_{OA} = 3 с$^{-1}$, ε_{OA} = 5 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
19 	Дано: OA = 40 см, AB = 40 см, AC = CB, BO_1 = 50 см, ω_{OA} = 0,5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 1 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
20 	Дано: OA = 12 см, AB = 8 см, r = 6 см, BC = 18 см, ω_{OA} = 5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 2 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .

Рис. 3.17

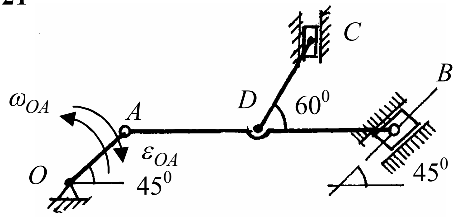
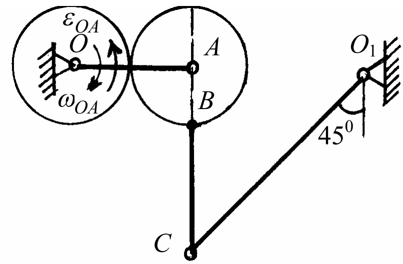
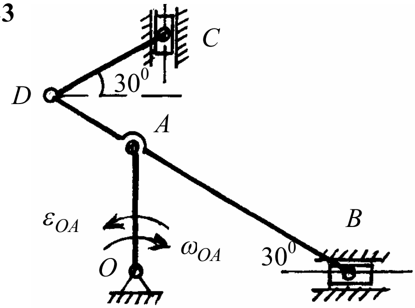
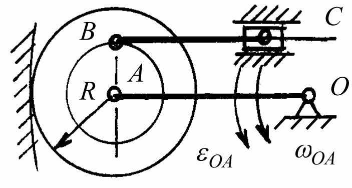
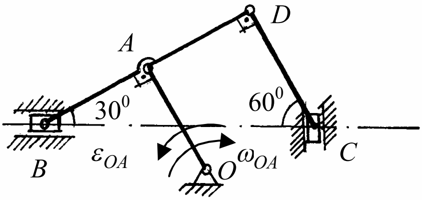
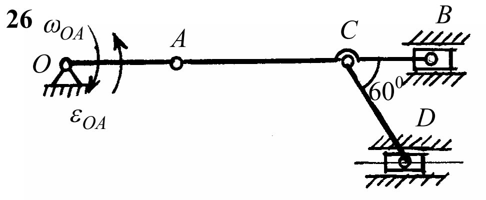
21 	Дано: OA = 15 см, DC = 20 см, $AD = DB$ = 25 см, ω_{OA} = 4 с$^{-1}$, ε_{OA} = 2 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
22 	Дано: OA = 22 см, AB = 11 см, BC = 25 см, CO_1 = 45 см, ω_{OA} = 3 с$^{-1}$, ε_{OA} = 5 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
23 	Дано: OA = 20 см, DC = 30 см, DA = 15 см, AB = 40 см, ω_{OA} = 2,5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
24 	Дано: OA = 8 см, AB = 3 см, R = 4 см, BC = 6 см, ω_{OA} = 5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
25 	Дано: $OA = AB$ = $= AD$ = 25 см, ω_{OA} = 2 с$^{-1}$, ε_{OA} = 4 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.

Рис. 3.18

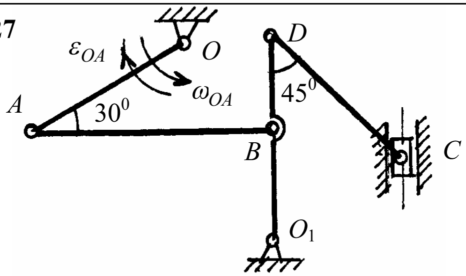
26



Дано: $OA = CD = 20$ см, $AC = 30$ см, $CB = 15$ см, $\omega_{OA} = 5$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 6$ с$^{-2}$.

Визначити: V_D, a_B.

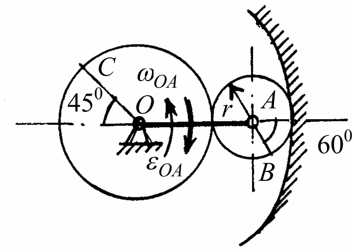
27



Дано: $OA = DC = 30$ см, $AB = DO_1 = 40$ см, $BD = 15$ см, $\omega_{OA} = 1$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 3$ с$^{-2}$.

Визначити: V_C, a_B.

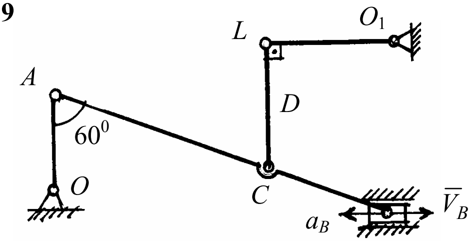
28



Дано: $OA = 20$ см, $JC = 9$ см, $r = 8$ см, $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 5$ с$^{-2}$.

Визначити: V_C, a_B.

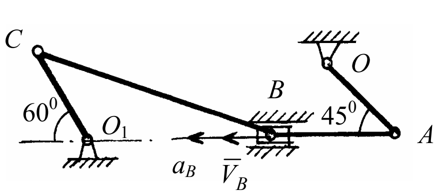
29



Дано: $OA = 20$ см, $CL = LO_1 = 25$ см, $AC = 45$ см, $\overline{V}_B = 10$ см/с, $a_B = 20$ см/с^2.

Визначити: V_D, ε_{AD}.

30



Дано: $CO_1 = OA = 20$ см, $AB = 35$ см, $CB = 50$ см, $\overline{V}_B = 40$ см/с, $a_B = 80$ см/с^2.

Визначити: ω_{AO}, ε_{AD}.

Рис. 3.19

Список літератури

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонський и др. – М., 1971. – Ч. 1, II.

2. Путята Т.В. Методика розв'язання задач з теоретичної механіки / Т.В. Путята, Б.Н. Фрадлін. – К.: Радянська школа, 1955.

3. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1979. – Ч. 1, II.

4. Тарг С.М. Курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М., 2001.

5. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать и др. – М., 1987. – Ч. 1, II.

6. Павловский М.А. Теоретична механіка: підручник / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002.

7. Теоретична механіка. Кінематика: конспект лекцій (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів) / за заг. ред. В.П. Шпачука – Харків: ХНАМГ, 2012. – 80 с.

8. Теоретична механіка (навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей) / В.П. Шпачук, М.С. Золотов, О.І. Рубаненко, А.О. Гарбуз. – Харків: ХНАМГ, 2007. – 124 с.

Зміст

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович
ЗОЛОТОВ Михайло Сергійович
РУБАНЕНКО Олександр Ігоревич
ГАРБУЗ Алла Олегівна

Методичні вказівки для практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань, самостійної роботи з розділу КІНЕМАТИКА курсу теоретичної механіки (для студентів 1 і 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 «Охорона праці»)

Відповідальний за випуск *В.П. Шпачук*

За авторською редакцією

План 2012, поз. 177М

Підп. до друку 21.03.2012	Формат 60 х 84 1/16
Друк на ризографі..	Ум. друк. арк. 2,4
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011